

1. Дискретное пространство элементарных событий. Операции над событиями.
2. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности.
3. Произвольное пространство элементарных событий. Алгебра и  $\sigma$  - алгебра множеств. Борелевские множества. Вероятность.
4. Геометрическая вероятность.
5. Условные вероятности. Независимые события и их свойства.
6. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
7. Повторяющиеся испытания. Формула Бернулли.
8. Случайные величины и функции распределения. Свойства функции распределения.
9. Дискретные случайные величины. Биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое распределения, распределения Пуассона.
10. Абсолютно-непрерывные случайные величины. Равномерное распределение, нормальное распределение, показательное распределение.
11. Математическое ожидание случайной величины и его свойства.
12. Дисперсия случайной величины и ее свойства.
13. Нормированные случайные величины. Коэффициент корреляции.
14. Неравенства Чебышева.
15. Закон больших чисел.
16. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.
17. Теорема Пуассона.
18. Характеристические функции и их свойства.
19. Сходимость случайных величин и функций распределения.
20. Центральная предельная теорема.
21. Основные задачи математической статистики. Выборка и вариационный ряд, полигон и гистограмма частот.
22. Эмпирическая функция распределения. Эмпирические моменты. Метод условных вариантов.
23. Точечные оценки параметров распределения.
24. Метод моментов определения параметров распределения.
25. Метод максимального правдоподобия нахождения параметров распределения.
26. Некоторые распределения связанные с нормальным распределением: Пирсона, Стьюдента.
27. Интервальные оценки параметров распределения. Нахождение доверительных интервалов для распределений Пуассона, биномиального, нормального.
28. Статистическая проверка статистических гипотез. Ошибки первого и второго рода.
29. Оптимальный критерий. Теорема Неймана-Пирсона.
30. Непараметрические критерии. Критерий Колмогорова.
31. Критерий Пирсона. Вычисление теоретических частот для различных видов распределений.
32. Элементы теории корреляции. Понятие корреляционной зависимости. Точечные оценки для условных математических ожиданий и коэффициента корреляции.
33. Цепи Маркова. Матрица перехода.
34. Классификация состояний цепи Маркова. Теорема солидарности.
35. Теорема о предельных вероятностях.
36. Случайные процессы. Марковские процессы со счетным множеством состояний.
37. Локально-регулярные марковские процессы. Система уравнений Колмогорова.
38. Применение теории марковских процессов к задачам теории массового обслуживания.
39. Процесс Пуассона.

## 1.

### 1.1. Дискретное пространство элементарных событий.

Множество всех элементарных событий, которые могут появиться в испытании, называют *пространством элементарных событий*  $\Omega$ , а сами элементарные события – *точками пространства*  $\Omega$ .

Пространство элементарных событий называется *дискретным*, если число его элементов конечно или счетно.

### 1.2. Операции над событиями.

Событие  $A$  отождествляют с подмножеством (пространства  $\Omega$ ), элементы которого есть элементарные исходы, благоприятствующие событию  $A$ ; событие  $B$  есть подмножество  $Q$ , элементы которого есть исходы, благоприятствующие событию  $B$  и т.д.

Так как события  $A$  и  $B$  сами являются множествами, то над ними можно выполнять различные операции:

$$A \cup B = \{\text{может произойти хотя бы одно из событий } A \text{ или } B\},$$

$$A \cap B = \{\text{одновременно могут произойти события } A \text{ и } B\},$$

$$A \setminus B = \{\text{произошло событие } A, \text{ но не произошло событие } B\}$$

Если  $A \cap B = \emptyset$ , то говорят, что события  $A$  и  $B$  *несовместны* (не могут произойти одновременно). Принято писать  $AB$  вместо  $A \cap B$ . Если  $AB = \emptyset$ , то пишут  $A + B$  вместо  $A \cup B$ .

## 2.

### 2.1. Классическое определение вероятности.

*Вероятностью события A* называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = m/n,$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих A; n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытаний появится хотя бы одно из них.

События называют *равновозможными*, если есть основание считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

### 2.2. Свойства вероятности.

Свойство 1. *Вероятность достоверного события равна 1.*

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае  $m = n$ , следовательно,

$$P(A) = m/n = n/n = 1.$$

Свойство 2. *Вероятность невозможного события равна 0.*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из общего числа элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае  $m = 0$ , следовательно,

$$P(A) = m/n = 0/n = 0.$$

Свойство 3. *Вероятность случайного события, есть положительное число заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае  $0 < m < n$ , значит,  $0 < m/n < 1$ , следовательно,

$$0 < P(A) < 1.$$

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

### 3.

#### 3.1. Произвольное пространство элементарных событий.

Множество всех элементарных событий, которые могут появиться в испытании, называют *пространством элементарных событий*  $\Omega$ , а сами элементарные события – *точками пространства*  $\Omega$ .

#### 3.2. Алгебра и $\sigma$ - алгебра множеств.

*Алгебра событий.*

Пусть  $\Omega$  - пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента (т.е. непустое множество произвольной природы). Мы собираемся определить набор подмножеств  $\Omega$ , которые будут называться событиями, и затем задать вероятность как функцию, определенную только на множестве событий.

Итак, *событиями* мы будем называть не любые подмножества  $\Omega$ , а лишь элементы некоторого выделенного набора подмножеств множества  $\Omega$ . При этом необходимо позаботиться, чтобы этот набор подмножеств был замкнут относительно обычных операций над событиями, т.е. чтобы объединение, пересечение, дополнение событий снова давало событие.

*Сигма-алгебра множеств.*

$\sigma$ -алгебра — алгебра множеств, замкнутая относительно операции счётного объединения.

#### 3.3. Борелевские множества.

*Борелевская сигма-алгебра* — это минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства (впрочем, она содержит и все замкнутые).

Если не оговорено противное, в качестве топологического пространства выступает множество вещественных чисел.

Борелевская сигма-алгебра обычно выступает в роли сигма-алгебры случайных событий вероятностного пространства. В борелевской сигма-алгебре на прямой или на отрезке содержатся многие «простые» множества: все интервалы, полуинтервалы, отрезки и их счётные объединения.

#### 3.4. Вероятность.

В современном математическом подходе классическая (т. е. не квантовая) вероятность задаётся аксиоматикой Колмогорова. Вероятностью называется мера  $\mathbf{P}$ , которая задаётся на множестве  $X$ , называемом вероятностным пространством. Эта мера должна обладать следующими свойствами:

1.  $\mathbf{P}(X) = 1, \mathbf{P}(\emptyset) = 0$ .
2.  $\forall A \subset X : \mathbf{P}(A) \geq 0$ .
3. Мера  $\mathbf{P}$  обладает свойством *счётной аддитивности* (сигма-аддитивности): если множества  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  не пересекаются, то  $\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \dots + \mathbf{P}(A_n) + \dots$

Из указанных условий следует, что вероятностная мера  $\mathbf{P}$  также обладает свойством *аддитивности*: если множества  $A_1$  и  $A_2$  не пересекаются, то  $\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2)$ . Для доказательства нужно положить все  $A_3, A_4, \dots$  равными пустому множеству и применить свойство счётной аддитивности.

Вероятностная мера может быть определена не для всех подмножеств множества  $X$ . Достаточно определить её на сигма-алгебре  $\Omega$ , состоящей из некоторых подмножеств множества  $X$ . При этом случайные события определяются как измеримые подмножества пространства  $X$ , то есть как элементы сигма-алгебры  $\Omega$ .

#### 4.

##### 4.1. Геометрическая вероятность.

Что бы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно не применимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят *геометрические вероятности* – вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.).

Если обозначить меру (длину, площадь, объем) области через *mes*, то вероятность попадания точки брошенной наудачу (в указанном выше смысле) в область *g* – часть области *G*, равна

$$P = \text{mes } g / \text{mes } G.$$

Замечание. В случае классического определения вероятность достоверного события (невозможного) события равна единице (нулю); справедливы и обратные утверждения (например, если вероятность события равна нулю, то событие невозможно). В случае геометрического определения вероятности обратные утверждения не имеют места. Например, вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области *G* равна нулю, однако это событие может произойти, и, следовательно, не является невозможным.

## 5.

### 5.1. Условные вероятности.

Условной вероятностью  $P_A(B)$  называют вероятность события  $B$ , вычисленную в предположении, что событие  $A$  уже наступило

$$P_A(B) = P(AB)/P(A) \quad (P(A) > 0).$$

Произведением двух событий  $A$  и  $B$  называют событие  $AB$ , состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.

### 5.2. Независимые события и их свойства.

Событие  $B$  называют независимым от события  $A$ , если появление события  $A$  не изменяет вероятности  $B$ , т. е. если условная вероятность события  $B$  равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B).$$

Справедливо и выражение:

$$P_B(A) = P(A),$$

т. е. условная вероятность события  $A$  в предположении, что наступило событие  $B$ , равна его безусловной вероятности. Другими словами, событие  $A$  не зависит от события  $B$ .

Итак, если событие  $B$  не зависит от события  $A$ , то и событие  $A$  не зависит от события  $B$ ; это означает, что *свойства независимости событий взаимны*.

Для независимых событий теорема умножения  $P(AB) = P(A)P_B(B)$  имеет вид

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Выше приведенную формулу умножения независимых событий, также принимают в качестве определения независимых событий.

Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют зависимыми.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Свойство 1. Пусть события  $A$  и  $B$  – несовместны. Тогда независимы они будут только в том случае, если  $P(A) = 0$  или  $P(B) = 0$ .

Свойство 2. Если события  $A$  и  $B$  независимы, то независимы и события  $A$  и  $\sim B$ ,  $\sim A$  и  $B$ , а также  $\sim A$  и  $\sim B$ .

## 6.

### 6.1. Формула полной вероятности.

Пусть событие  $A$  может наступить при условии появления одного из несовместных событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности  $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$  события  $A$ . Как найти вероятность события  $A$ ? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема.** Вероятность события  $A$ , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образующих полную группу, равна сумме произведения вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события  $A$ :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

### 6.2. Формула Бейеса.

Пусть событие  $A$  может наступить при условии появления одного из несовместных событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образующих полную группу. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*. Вероятность события  $A$  определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие  $A$ . Поставим своей задачей определить, как изменились вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные вероятности

$$P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n).$$

Найдем сначала условную вероятность  $P_A(B_1)$ . По теореме умножения имеем

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A).$$

Отсюда

$$P_A(B) = (P(B_1)P_{B_1}(A))/P(A).$$

Заменяя здесь  $P(A)$  по формуле полной вероятности, получим

$$P_A(B_1) = (P(B_1)P_{B_1}(A))/(P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)).$$

Аналогично выводятся формулы, определяющие условные вероятности остальных гипотез, т. е. условная вероятность любой гипотезы  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) может быть вычислена по формуле

$$P_A(B_i) = (P(B_i)P_{B_i}(A))/(P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)).$$

Полученные формулы называют *формулами Бейеса* (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764 г.). *Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятность гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие  $A$ .*

## 7.

### 7.1. Повторяющиеся испытания.

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события А*.

В разных независимых испытаниях событие А может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие А имеет одну и ту же вероятность.

Ниже воспользуемся понятием *сложного события*, понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называют *простыми*.

Пусть производится  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события А в каждом испытании одна и та же, а именно равна  $p$ . Следовательно, вероятность «ненаступления» события в каждом испытании также постоянна и равна  $q = 1 - p$ .

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при  $n$  испытаниях событие А осуществится ровно  $k$  раз и, следовательно, не осуществится  $n - k$  раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие А повторилось ровно  $k$  раз в определенной последовательности. Например, если речь идет о появлении события А три раза в четырех испытаниях, то возможны следующие сложные события:  $AAA\sim A$ ,  $AA\sim AA$ ,  $A\sim AAA$ ,  $\sim AAAA$ .

Искомую вероятность обозначим  $P_n(k)$ . Например, символ  $P_5(3)$  означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью, так называемой формулы Бернулли.

### 7.2. Формула Бернулли.

Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в  $n$  испытаниях событие наступит  $k$  раз и не наступит  $n - k$  раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна  $p^k q^{n-k}$ . Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  элементов, т. е.  $C_n^k$ . Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появления  $k$  раз события А в  $n$  испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Полученную формулу называют *формулой Бернулли*.

## 8.

### 8.1. Случайные величины и функции распределения.

*Случайной величиной* называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

*Дискретной* (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

*Непрерывной* называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

*Законом распределения дискретной случайной величины* называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

Для непрерывной же случайной величины, значения которые она может принимать, удобнее задавать в виде функции распределения, при помощи которой также можно будет задать закон распределения дискретной случайной величины.

*Функцией распределения* называют функцию  $F(X)$ , определяющую вероятность того, что случайная величина  $X$  в результате испытания примет значение меньшее  $x$ , т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

### 8.2. Свойства функции распределения.

Свойство 1. *Значение функции распределения принадлежит отрезку  $[0, 1]$ :*

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

Свойство 2.  *$F(x)$  – неубывающая функция, т. е.*

$$F(x_2) \geq F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Свойство 3. *Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу  $(a, b)$ , то: 1)  $F(x) = 0$  при  $x \leq a$ ; 2)  $F(x) = 1$ , при  $x \geq b$ .*

## 9.

### 9.1. Дискретные случайные величины.

*Случайной величиной* называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

*Дискретной* (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

*Законом распределения дискретной случайной величины* называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

### 9.2. Биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое распределения, распределения Пуассона.

*Биномиальное распределение.*

Пусть производится  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых событие  $A$  может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна  $p$  (следовательно, вероятность не появления  $q = 1 - p$ ). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины  $X$  число появлений события  $A$  в этих испытаниях, тогда закон распределения этой случайной величины будет иметь вид:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

*Биномиальным* называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.

*Геометрическое распределение.*

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  равна  $p$  ( $0 < p < 1$ ) и, следовательно, вероятность его не появления равна  $q = 1 - p$ . Испытания заканчиваются, как только появится событие  $A$ . Таким образом, если событие  $A$  появилось в  $k$ -ом испытании, то в предшествующих  $k-1$  оно не появлялось.

Пусть в первых  $k-1$  испытаниях событие  $A$  не наступило, а в  $k$ -ом испытании появилось. Вероятности этого «сложного» события, по теореме умножения вероятностей независимых событий,

$$P(X = k) = q^{k-1}p.$$

Полагая  $k = 1, 2, \dots$  получим геометрическую прогрессию, по причине которой и названо это распределение - *геометрическим*.

### *Гипергеометрическое распределение.*

Гипергеометрическое распределение – моделирует количество удачных выборов без возвращения из конечной совокупности.

Пусть имеется конечная совокупность, состоящая из  $N$  элементов. Предположим, что  $D$  из них обладают нужным нам свойством. Оставшиеся  $N - M$  этим свойством не обладают. Случайным образом из общей совокупности выбирается группа из  $n$  элементов. Пусть  $X$  - случайная величина, равная количеству выбранных элементов, обладающих нужным свойством. Тогда функция вероятности  $X$  имеет вид:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

### *Распределение Пуассона.*

Пусть производится  $n$  независимых испытаний в каждом из которых вероятность появления события  $A$  равна  $p$ . Для определения вероятности  $k$  появлений события  $A$  в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же  $n$  велико, то пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако эта формула не пригодна, если вероятность события мала ( $p \leq 0,1$ ). В этих случаях ( $n$  велико,  $p$  мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона

$$P_n(k) = (\lambda^k e^{-\lambda})/k!,$$

которая и выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых ( $n$  велико) и редких событий ( $p$  мало).

## 10.

### 10.1. Абсолютно-непрерывные случайные величины.

*Случайной величиной* называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

*Непрерывной* называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

### 10.2. Равномерное распределение, нормальное распределение, показательное распределение.

*Плотностью распределения* вероятностей непрерывной случайной величины  $X$  называют функцию  $f(x)$  – первую производную от функции распределения  $F(X)$ :

$$f(x) = F'(x).$$

Плотности распределения непрерывных случайных величин называют также *законами распределений*.

*Равномерное распределение.*

Распределение вероятностей называют *равномерным*, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Описывается плотность равномерного распределения следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ 1/(b-a) & \text{при } a < x \leq b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

*Нормальное распределение.*

*Нормальным* называют распределение непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Мы видим, что нормальное распределение определяется двумя параметрами:  $a$  и  $\sigma$ . Достаточно, зная эти два параметра, чтобы задать распределение. В данном случае  $a$  – математическое ожидание, а  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

### *Показательное распределение.*

*Показательным (экспоненциальным)* называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины  $X$ , которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где  $\lambda$  – постоянная положительная величина.

Мы видим, что показательное распределение задается одним параметром  $\lambda$ . Эта особенность показательного распределения указывает на его преимущество по сравнению с распределениями, зависящими от большего числа параметров. Обычно параметры неизвестны и приходится находить их оценки (приближенные значения); разумеется, проще оценить один параметр, чем два или три и т.д. Показательное распределение моделирует время между двумя последовательными свершениями одного и того же события.

## 11.

### 11.1. Математическое ожидание случайной величины и его свойства.

*Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i .$$

*Замечание.* Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины, можно вычислить по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx .$$

*Математическое ожидание приближенно равно* (тем точнее, чем больше число испытаний) *среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.*

*Свойства математического ожидания.*

Свойство 1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:*

$$M(C) = C.$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:*

$$M(CX) = CM(X).$$

Свойство 3. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$M(XY) = M(X) * M(Y).$$

Свойство 4. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:*

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

## 12.

### 12.1. Дисперсия случайной величины и ее свойства.

На практике часто требуется выяснить рассеяние случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

На первый взгляд может показаться, что для оценки рассеяния проще всего вычислить все возможные значения отклонения случайной величины и затем найти их среднее значение. Однако такой путь ничего не даст, так как среднее значение отклонения, т. е.  $M[X - M(X)]$ , для любой случайной величины равно нулю.

Поэтому чаще всего идут по другому пути – используют для вычисления дисперсию.

*Дисперсией* (рассеянием) случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.

**Теорема.** Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины  $X$  и квадратом ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

*Свойства дисперсии.*

Свойство 1. *Дисперсия постоянной величины  $C$  равна нулю:*

$$D(C) = 0.$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно возводить за знак дисперсии возводя его в квадрат:*

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Свойство 3. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:*

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Свойство 4. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:*

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

### 13.

#### 13.1. Нормированные случайные величины.

*Нормированная случайная величина* имеет дисперсию равную 1 и математическое ожидание равное 0.

*Нормированная случайная величина*  $V$  – это отношение данной случайной величины  $X$  к ее среднему квадратичному отклонению  $\sigma$

$$V = X/\sigma.$$

*Среднее квадратичное отклонение* – это квадратный корень из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{D(X)},$$

Математическое ожидание и дисперсия нормированной случайной величины  $V$  выражаются через характеристики  $X$  так:

$$M(V) = \frac{M(X)}{\sigma} = \frac{1}{v}, D(V) = 1,$$

где  $v$  – коэффициент вариации исходной случайной величины  $X$ .

Для функции распределения  $F_V(x)$  и плотности распределения  $f_V(x)$  имеем:

$$F_V(x) = F(\sigma x), f_V(x) = \sigma f(\sigma x),$$

где  $F(x)$  – функция распределения исходной случайной величины  $X$ , а  $f(x)$  – ее плотность вероятности.

#### 13.2. Коэффициент корреляции.

*Коэффициент корреляции* – это показатель характера взаимного стохастического влияния изменения двух случайных величин. Коэффициент корреляции может принимать значения от -1 до +1. Если значение по модулю находится ближе к 1, то это означает наличие сильной связи, а если ближе к 0 – связь отсутствует или является существенно нелинейной. При коэффициенте корреляции равном по модулю единице говорят о функциональной связи (а именно линейной зависимости), то есть изменения двух величин можно описать линейной функцией.

Процесс называется *стохастическим*, если он описывается случайными переменными, значение которых меняется во времени.

*Коэффициент корреляции Пирсона.*

Для метрических величин применяется коэффициент корреляции Пирсона, точная формула которого была выведена Френсисом Гамильтоном. Пусть  $X$  и  $Y$  – две случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве. Тогда их коэффициент корреляции задается формулой:

$$R_{x,y} = \frac{M[XY] - M(X)M(Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}.$$



## 14.

### 14.1. Неравенства Чебышева.

*Неравенство Маркова.*

*Неравенство Маркова* в теории вероятностей даёт оценку вероятности, что случайная величина превзойдёт по модулю фиксированную положительную константу, в терминах её математического ожидания. Получаемая оценка обычно достаточно груба. Однако, она позволяет получить определённое представление о распределении, когда последнее не известно явным образом.

Пусть случайная величина  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  определена на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , и её математическое ожидание конечно. Тогда

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{a},$$

где  $a > 0$ .

*Неравенство Чебышёва — Бьенеме.*

Если  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$  ( $\mathbb{E}[X^2]$  – математическое ожидание), то для любого  $x > 0$ , справедливо

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq x) \leq \frac{D\xi}{x^2}.$$

## 15.

### 15.1. Закон больших чисел.

*Закон больших чисел* утверждает, что эмпирическое среднее (среднее арифметическое) достаточно большой конечной выборки из фиксированного распределения близко к теоретическому среднему (математическому ожиданию) этого распределения. В зависимости от вида сходимости различают слабый закон больших чисел, когда имеет место сходимость по вероятности, и усиленный закон больших чисел, когда имеет место сходимость почти всюду.

Всегда найдётся такое количество испытаний, при котором с любой заданной наперёд вероятностью частота появления некоторого события будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности. Общий смысл закона больших чисел — совместное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая.

*Слабый закон больших чисел.*

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i .$$

Тогда  $S_n \xrightarrow{P} M(X)$ .

*Усиленный закон больших чисел.*

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i .$$

Тогда  $S_n \rightarrow M(X)$  почти наверное.

## 16.

### 16.1. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

*Локальная теорема Лапласа.*

Если вероятность  $p$  появления события  $A$  в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность  $P_n(k)$  того, что событие  $A$  появится в  $n$  испытаниях ровно  $k$  раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше  $n$ ) значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x).$$

где  $x = (k - np) / \sqrt{npq}$ .

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции  $\varphi(x)$ , соответствующие положительным целым значениям аргумента  $x$ . Для отрицательных значений аргумента, пользуются теми же таблицами, так как функция  $\varphi(x)$  четна, т. е.  $\varphi(-x) = \varphi(x)$ .

Итак, вероятность того, что событие  $A$  появится в  $n$  независимых испытаниях ровно  $k$  раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x).$$

где  $x = (k - np) / \sqrt{npq}$ .

*Интегральная теорема Лапласа.*

Если вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность  $P_n(k_1, k_2)$  того, что событие  $A$  появится в  $n$  испытаниях от  $k_1$  до  $k_2$  раз, приближенно равна определенному интегралу

$$P_n(k_1, k_2) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz,$$

где  $x' = (k_1 - np) / \sqrt{npq}$ ,  $x'' = (k_2 - np) / \sqrt{npq}$ .

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл  $\int e^{-z^2/2} dz$  не выражается через элементарные функции.

## 17.

### 17.1. Теорема Пуассона.

Если число испытаний  $n$  в схеме независимых испытаний Бернулли стремится к бесконечности и  $p \rightarrow 0$  так, что  $np \rightarrow \lambda$ ,  $\lambda > 0$ , то при любых  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Это означает, что при больших  $n$  и малых  $p$  вместо громоздких вычислений по точной формуле  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$  можно воспользоваться приближенной формулой

$$P_n(k) = \frac{np^k}{k!} e^{-np},$$

т.е. использовать формулу Пуассона для  $\lambda = np$ .

На практике пуассоновским приближением пользуются при  $npq < 9$ .

18.

### 18.1. Характеристические функции и их свойства.

$i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица,  $t$  — вещественная переменная,  $e^{it} = \cos t + i \sin t$  — формула Эйлера,  $E(\eta + i\zeta) = E\eta + iE\zeta$  — способ вычисления математического ожидания комплекснозначной случайной величины  $\eta + i\zeta$ , если математические ожидания её действительной ( $\eta$ ) и мнимой ( $\zeta$ ) частей существуют.

Как всегда, модулем комплексного числа  $z = x + iy$  называется число  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , так что  $|e^{it}| = 1$ .

Функция  $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}$  вещественной переменная  $t$  называется *характеристической функцией* случайной величины  $\xi$ .

*Свойства характеристической функции.*

Свойство 1. *Характеристическая функция всегда существует:*

$$|\varphi_\xi(t)| = |Ee^{it\xi}| \leq 1.$$

Свойство 2. *По характеристической функции однозначно восстанавливается распределение (функция распределения, плотность или таблица распределения). Т.е. если две случайные величины имеют одинаковые характеристические функции, то и распределения этих величин совпадают.*

Свойство 3. *Характеристическая функция случайной величины  $a + b\xi$  связана с характеристической функцией случайной величины  $\xi$  равенством:*

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = Ee^{it(a+b\xi)} = e^{ita} Ee^{i(tb)\xi} = e^{ita} \varphi_\xi(tb).$$

Свойство 4. *Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых: если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то, по свойству математических ожиданий*

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\xi+\eta)} = Ee^{it\xi} Ee^{it\eta} = \varphi_\xi(t) \varphi_\eta(t).$$

Свойство 5. Пусть существует момент порядка  $k \in \mathbb{N}$  случайной величины  $\xi$ , т.е.  $E|\xi|^k < \infty$ . Тогда характеристическая функция  $\varphi_\xi(t)$  непрерывно дифференцируема  $k$  раз, и её  $k$ -я производная в нуле связана с моментом порядка  $k$  равенством:

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = \left( \frac{d^k}{dt^k} E e^{it\xi} \right) \Big|_{t=0} = \left( E i^k \xi^k e^{it\xi} \right) \Big|_{t=0} = i^k E \xi^k.$$

Свойство 6. Пусть существует момент порядка  $k \in \mathbb{N}$  случайной величины  $\xi$ , т.е.  $E|\xi|^k < \infty$ . Тогда характеристическая функция  $\varphi_\xi(t)$  в окрестности точки  $t=0$  разлагается в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(t) &= \varphi_\xi(0) + \sum_{j=1}^k \frac{t^j}{j!} \varphi_\xi^{(j)}(0) + o(|t|^k) = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{i^j t^j}{j!} E \xi^j + o(|t|^k) = \\ &= 1 + it E \xi - \frac{t^2}{2} E \xi^2 + \dots + \frac{i^k t^k}{k!} E \xi^k + o(|t|^k). \end{aligned}$$

## 19.

### 19.1. Сходимость случайных величин и функций распределения.

Последовательность случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  сходится почти наверное к случайной величине  $X$ , если

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right\} = 1.$$

Сходимость почти наверное обозначается так:  $X_n \xrightarrow{\text{п. н.}} X$ .

Последовательность случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  сходится по вероятности к случайной величине  $X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| \leq \varepsilon\} = 1.$$

Сходимость по вероятности обозначается так:  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

Последовательность случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  сходится по распределению (или слабо сходится) к случайной величине  $X$ , если во всех точках  $x$ , в которых функция распределения  $F_X(x)$  непрерывна,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

Сходимость по распределению обозначается так:  $X_n \Rightarrow X$  или  $X_n \xrightarrow{D} X$ .

Примером сходимости по распределению является формула Пуассона.

Различные виды сходимости обладают следующими свойствами:

если  $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$ , то  $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y, X_n \cdot Y_n \xrightarrow{P} X \cdot Y$ ;

если  $X_n \xrightarrow{P} X$  и  $\varphi(x)$  – непрерывная функция, то  $\varphi(X_n) \xrightarrow{P} \varphi(X)$ ;

если  $X_n \xrightarrow{P} x_0$  и  $\varphi(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то  $\varphi(X_n) \xrightarrow{P} \varphi(x_0)$ ;

если  $X_n \xrightarrow{P} x = \text{const}, Y_n \Rightarrow Y$ , то  $X_n + Y_n \Rightarrow x + Y, X_n \cdot Y_n \Rightarrow x \cdot Y$ ;

из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности:

если  $X_n \xrightarrow{\text{п. н.}} X$ , то  $X_n \xrightarrow{P} X$ , но не наоборот!;

из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению:

если  $X_n \xrightarrow{P} X$ , то  $X_n \Rightarrow X$ ;

из сходимости по распределению к константе следует сходимость по вероятности:

если  $X_n \Rightarrow x = \text{const}$ , то  $X_n \xrightarrow{P} x$ ;

Отметим также, что из сходимости по вероятности не следует сходимость математических ожиданий, дисперсий и других характеристик.

20.

### 20.1. Центральная предельная теорема.

*Центральные предельные теоремы* — класс теорем, утверждающих, что сумма большого количества слабо зависимых случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному. Так как многие случайные величины в приложениях являются суммами нескольких случайных факторов, центральные предельные теоремы обосновывают популярность нормального распределения.

*Классическая формулировка центральной предельной теоремы.*

Пусть  $X_1, \dots, X_n, \dots$  есть бесконечная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание и дисперсию. Обозначим последние через  $\mu$  и  $\sigma^2$ , соответственно. Пусть  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Тогда

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \rightarrow N(0,1) \quad \text{по распределению при } n \rightarrow \infty.$$

где  $N(0,1)$  – нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением, равным единице. Обозначим через  $X_B$  выборочное среднее первых  $n$  величин, то есть  $X_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , мы можем переписать результат центральной предельной теоремы в следующем виде

$$\sqrt{n} \frac{X_B - \mu}{\sigma} \rightarrow N(0,1) \quad \text{по распределению при } n \rightarrow \infty.$$

## 21.

### 21.1. Основные задачи математической статистики.

Установление закономерностей, которым подчиняются массовые случайные явления, основано на изучении метода теории вероятностей статистических данных – результатов наблюдений.

Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики – разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценки параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и др.

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие задачи. Современную математическую статистику определяют как науку о принятии решений в условиях неопределенности.

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

### 21.2. Выборка и вариационный ряд, полигон и гистограмма частот.

*Выборка* — множество случаев (испытуемых, объектов, событий, образцов), с помощью определённой процедуры выбранных из генеральной совокупности для участия в исследовании.

*Генеральная совокупность* – называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

*Характеристики выборки:*

Качественная характеристика выборки – кого именно мы выбираем и какие способы построения выборки мы для этого используем.

Количественная характеристика выборки – сколько случаев выбираем, другими словами объём выборки.

*Вариационный ряд* — упорядоченная по величине последовательность выборочных значений наблюдаемой случайной величины  $x_1^{(n)} \leq \dots \leq x_n^{(n)}$ ; равные между собой элементы выборки нумеруются в произвольном порядке; элементы вариационного ряда называются

порядковыми (ранговыми) статистиками; число  $\lambda_m = m / n$  называется рангом порядковой статистики  $x_m^{(n)}$ .

*Полигоном частот* называют ломаную, отрезки которой соединяют точки  $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_k; n_k)$ . Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты  $x_i$ , а на оси ординат – соответствующие им частоты  $n_i$ . Точки  $(x_i, n_i)$  соединяют отрезками и получают полигон частот.

*Гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной  $h$ , а высоты равны отношению  $n_i/h$  (плотность частоты). Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ним проводят отрезки, параллельно оси абсцисс на расстоянии  $n_i/h$ .

## 22.

### 22.1. Эмпирическая функция распределения.

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака  $X$ . Введем обозначения:  $n_x$  – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньшее  $x$ ;  $n$  – общее число наблюдений (объем выборки). Ясно, что относительная частота события  $X < x$ , равная  $n_x/n$ . Если  $x$  изменяется, то, вообще говоря, изменяется и относительная частота, т. е. относительная частота  $n_x/n$  есть функция от  $x$ . Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют эмпирической.

*Эмпирической функцией распределения* (функцией распределения выборки) называют функцию  $F^*(x)$ , определяющую для каждого значения  $x$  относительную частоту события  $X < x$ . Итак, по определению,

$$F^*(x) = n_x/n.$$

### 22.2. Эмпирические моменты.

*Обычным эмпирическим моментом* порядка  $k$  называют среднее значение  $k$ -х степеней разностей  $x_i - C$ :

$$M_k = (\sum n_i (x_i - C)^k) / n,$$

где  $x_i$  – наблюдаемая варианта,  $n_i$  – частота варианты,  $n$  – объем выборки,  $C$  – произвольное постоянное число (ложный нуль).

*Начальным эмпирическим моментом* порядка  $k$  называют обычно момент порядка  $k$  при  $C = 0$

$$M_k = (\sum n_i x_i^k) / n,$$

В частности,

$$M_1 = (\sum n_i x_i^1) / n = \bar{x}_e,$$

т. е. начальный эмпирический момент первого порядка равен выборочной средней.

*Центральным эмпирическим моментом* порядка  $k$  называют обычный момент порядка  $k$  при  $C = \bar{x}_e$

$$m_k = (\sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^k) / n.$$

В частности,

$$m_2 = (\sum n_i (x_i - \bar{x}_e)^2) / n = D_e,$$

т. е. центральный эмпирический момент второго порядка равен выборочной дисперсии.

### 22.3. Метод условных вариантов.

Предположим, что варианты выборки расположены в возрастающем порядке, т. е. в виде вариационного ряда.

*Равноотстоящими* называют варианты, которые образуют арифметическую прогрессию с разностью  $h$ .

*Условными* называют варианты, определяемые равенством

$$u_i = (x_i - C)/h,$$

где  $C$  – ложный нуль (новое начало отсчета);  $h$  – шаг, т. е. разность между любыми двумя соседними первоначальными вариантами (новая единица масштаба).

Упрощенные методы расчета сводных характеристик выборки основаны на замене первоначальных вариантов условными.

## 23.

### 23.1. Точечные оценки параметров распределения.

*Точечная оценка* предполагает нахождение единственной числовой величины, которая и принимается за значение параметра. Такую оценку целесообразно определять в тех случаях, когда объем ЭД достаточно велик. Причем не существует единого понятия о достаточном объеме ЭД, его значение зависит от вида оцениваемого параметра (к этому вопросу предстоит вернуться при изучении методов интервальной оценки параметров, а предварительно будем считать достаточной выборку, содержащую не менее чем 10 значений). При малом объеме ЭД точечные оценки могут значительно отличаться от истинных значений параметров, что делает их непригодными для использования.

*Задача точечной оценки параметров* в типовом варианте постановки состоит в следующем .

Имеется: выборка наблюдений  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  за случайной величиной  $X$ . Объем выборки  $n$  фиксирован.

Известен вид закона распределения величины  $X$ , например, в форме плотности распределения  $f(T, x)$ , где  $T$  – неизвестный (в общем случае векторный) параметр распределения. Параметр является неслучайной величиной.

Требуется найти оценку  $q$  параметра  $T$  закона распределения.

Ограничения: выборка представительная.

Существует несколько методов решения задачи точечной оценки параметров, наиболее употребительными из них являются методы максимального (наибольшего) правдоподобия, моментов и квантилей.

## **24.**

### **24.1. Метод моментов определения параметров распределения.**

Метод предложен К. Пирсоном в 1894 г. Сущность метода: выбирается столько эмпирических моментов, сколько требуется оценить неизвестных параметров распределения. Желательно применять моменты младших порядков, так как погрешности вычисления оценок резко возрастают с увеличением порядка момента; вычисленные по ЭД оценки моментов приравниваются к теоретическим моментам; параметры распределения определяются через моменты, и составляются уравнения, выражающие зависимость параметров от моментов, в результате получается система уравнений. Решение этой системы дает оценки параметров распределения генеральной совокупности.

25.

### 25.1. Метод максимального правдоподобия нахождения параметров распределения.

Метод предложен Р. Фишером в 1912 г. Метод основан на исследовании вероятности получения выборки наблюдений  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Эта вероятность равна  $f(x_1, T) f(x_2, T) \dots f(x_n, T) dx_1 dx_2 \dots dx_n$ .

Совместная плотность вероятности

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; T) = f(x_1, T) f(x_2, T) \dots f(x_n, T),$$

рассматриваемая как функция параметра  $T$ , называется *функцией правдоподобия*.

В качестве оценки  $q$  параметра  $T$  следует взять то значение, которое обращает функцию правдоподобия в максимум. Для нахождения оценки необходимо заменить в функции правдоподобия  $T$  на  $q$  и решить уравнение  $\delta L / \delta q = 0$ . В целях упрощения вычислений переходят от функции правдоподобия к ее логарифму  $\ln L$ . Такое преобразование допустимо, так как функция правдоподобия – положительная функция, и она достигает максимума в той же точке, что и ее логарифм. Если параметр распределения векторная величина  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , то оценки максимального правдоподобия находят из системы уравнений

$$\delta \ln L(q_1, q_2, \dots, q_n) / \delta q_1 = 0;$$

$$\delta \ln L(q_1, q_2, \dots, q_n) / \delta q_2 = 0;$$

.....

$$\delta \ln L(q_1, q_2, \dots, q_n) / \delta q_n = 0.$$

Для проверки того, что точка оптимума соответствует максимуму функции правдоподобия, необходимо найти вторую производную от этой функции. И если вторая производная в точке оптимума отрицательна, то найденные значения параметров максимизируют функцию.

Итак, нахождение оценок максимального правдоподобия включает следующие этапы: построение функции правдоподобия (ее натурального логарифма); дифференцирование функции по искомым параметрам и составление системы уравнений; решение системы уравнений для нахождения оценок; определение второй производной функции, проверку ее знака в точке оптимума первой производной и формирование выводов.

26.

**26.1. Некоторые распределения связанные с нормальным распределением: Пирсона, Стьюдента.**

*Распределение  $\chi^2$  (хи-квадрат) с  $k$  степенями свободы* — это распределение суммы квадратов  $k$  независимых стандартных нормальных случайных величин.

Пусть  $X_1, \dots, X_k$  — совместно независимые стандартные нормальные случайные величины, то есть:  $X_i \sim N(0, 1)$ .

Тогда случайная величина  $Y = X_1^2 + \dots + X_k^2$  имеет распределение хи-квадрат с  $k$  степенями свободы, обозначаемое  $\chi^2(k)$ ; если же случайные величины связаны между собой одним линейным соотношением, например,  $\sum X_i = n\bar{X}$ , то число степеней свободы  $k = n - 1$ .

*Распределение Стьюдента* в теории вероятностей — это однопараметрическое семейство абсолютно непрерывных распределений.

Пусть  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  — независимые стандартные нормальные случайные величины, такие что  $Y_i \sim N(0, 1)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Тогда распределение случайной величины  $t$ , где

$$t = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2}},$$

называется *распределением Стьюдента с  $n$  степенями свободы*. Пишут  $t \sim t(n)$ .

## 27.

### 27.1. Интервальные оценки параметров распределения.

*Интервальный метод оценивания параметров распределения случайных величин* заключается в определении интервала (а не единичного значения), в котором с заданной степенью достоверности будет заключено значение оцениваемого параметра. *Интервальная оценка* характеризуется двумя числами – концами интервала, внутри которого предположительно находится истинное значение параметра. Иначе говоря, вместо отдельной точки для оцениваемого параметра можно установить интервал значений, одна из точек которого является своего рода "лучшей" оценкой. Интервальные оценки являются более полными и надежными по сравнению с точечными, они применяются как для больших, так и для малых выборок. Совокупность методов определения промежутка, в котором лежит значение параметра  $T$ , получила название методов интервального оценивания. К их числу принадлежит метод Неймана.

*Постановка задачи интервальной оценки параметров* заключается в следующем.

Имеется: выборка наблюдений  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  за случайной величиной  $X$ . Объем выборки  $n$  фиксирован.

Необходимо с доверительной вероятностью  $g = 1 - \alpha$  определить интервал  $t_0 - t_1$  ( $t_0 < t_1$ ), который накрывает истинное значение неизвестного скалярного параметра  $T$  (здесь, как и ранее, величина  $T$  является постоянной, поэтому некорректно говорить, что значение  $T$  попадает в заданный интервал).

Ограничения: выборка представительная, ее объем достаточен для оценки границ интервала.

Эта задача решается путем построения доверительного утверждения, которое состоит в том, что интервал от  $t_0$  до  $t_1$  накрывает истинное значение параметра  $T$  с доверительной вероятностью не менее  $g$ . Величины  $t_0$  и  $t_1$  называются нижней и верхней доверительными границами (НДГ и ВДГ соответственно). Доверительные границы интервала выбирают так, чтобы выполнялось условие  $P(t_0 \leq T \leq t_1) = g$ . В инженерных задачах доверительную вероятность  $g$  назначают в пределах от 0,95 до 0,99. В доверительном утверждении считается, что статистики  $t_0$  и  $t_1$  являются случайными величинами и изменяются от выборки к выборке. Это означает, что доверительные границы определяются неоднозначно, существует бесконечное количество вариантов их установления.

На практике применяют два варианта задания доверительных границ: устанавливают симметрично относительно оценки параметра, т.е.  $t_0 = q - Eg$ ,  $t_1 = q + Eg$ , где  $Eg$  выбирают так, чтобы выполнялось доверительное утверждение. Следовательно, величина абсолютной погрешности оценивания  $Eg$  равна половине доверительного интервала; устанавливают из условия равенства вероятностей выхода за верхнюю и нижнюю границу  $P(T > q + E_{1,g}) = P(T < q - E_{2,g}) = \alpha/2$ . В общем случае величина  $E_{1,g}$  не равна  $E_{2,g}$ . Для симметричных распределений случайного параметра  $q$  в целях минимизации величины интервала значения  $E_{1,g}$  и  $E_{2,g}$  выбирают одинаковыми, следовательно, в таких случаях оба варианта эквивалентны.

Нахождение доверительных интервалов требует знания вида и параметров закона распределения случайной величины  $q$ . Для ряда практически важных случаев этот закон можно определить из теоретических соображений.

Метод позволяет по имеющейся случайной выборке построить функцию  $u(T, q)$ , распределенную асимптотически нормально с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. В основе метода лежат следующие положения. Пусть:  $f(x, q)$  – плотность распределения случайной величины  $X$ ;  $\ln[L(x, q)]$  – логарифм функции правдоподобия;  $y = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta)$ ;

$A^2 = M(y)^2$  – дисперсия  $y$ . Если математическое ожидание  $M(y) = 0$  и дисперсия  $y$  конечна, то распределение случайной величины  $w = \frac{1}{A\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x, \theta)$  асимптотически нормально с параметрами 0 и 1 при  $n \rightarrow \infty$ .

## 27.2. Нахождение доверительных интервалов для распределений Пуассона, биномиального, нормального.

asdasdasd

## 28.

### 28.1. Статистическая проверка статистических гипотез.

Часто необходимо знать закон распределения генеральной совокупности. Если закон распределения неизвестен, но имеются основания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его  $A$ ), выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону  $A$ . Таким образом, в этой гипотезе речь идет о виде предполагаемого распределения.

Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. Если есть основания предположить, что неизвестный параметр  $q$  равен определенному значению  $q^*$ , выдвигают гипотезу  $q = q^*$ . Таким образом, в этой гипотезе речь идет о предполагаемой величине параметра одного известного распределения.

Возможны и другие гипотезы: о равенстве параметров двух или нескольких распределений, о независимости выборок и другие.

*Статистической* называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений.

Например, статистическими являются гипотезы:

- 1) генеральная совокупность распределена по закону Пуассона;
- 2) дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

В первой гипотезе сделано предположение о виде неизвестного распределения, во второй – о параметрах двух известных распределений.

Гипотеза «на Марсе есть жизнь» не является статистической, поскольку в ней не идет речь ни о виде, ни о параметрах распределения.

Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречивую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречивая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать.

*Нулевой (основной)* называют выдвинутую гипотезу  $H_0$ .

*Конкурирующей (альтернативной)* называют гипотезу  $H_1$ , которая противоречит нулевой.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание  $a$  нормального распределения равно 10, то конкурирующая гипотеза, в частности, может состоять в предположении, что  $a \neq 10$ . Коротко это записывают так:  $H_0: a = 10$ ,  $H_1: a \neq 10$ .

Различают гипотезы, которые содержат только одно и более одного предположений.

*Простой* называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Например, если  $\lambda$  – параметр показательного распределения, то гипотеза  $H_0: \lambda = 5$  – простая. Гипотеза  $H_0$ : математическое ожидание нормального распределения равно 3 ( $\sigma$  известно) – простая.

*Сложной* называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, сложная гипотеза  $H: \lambda > 5$  состоит из бесчисленного множества

простых вида  $H_1: \lambda = b_i$ , где  $b_i$  – любое число большее пяти. Гипотеза  $H_0$ : математическое ожидание нормального распределения равно 3 ( $\sigma$  неизвестно) – сложная.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, ее называют статистической. В итоге статистической проверки гипотезы о двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов.

## **28.2. Ошибки первого и второго рода.**

*Ошибка первого рода* состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

*Ошибка второго рода* состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Последствия этих ошибок могут оказаться весьма различными. Например, если отвергнуто правильное решение «продолжать строительство жилого дома», то эта ошибка первого рода понесет за собой материальный ущерб; если же принято неправильное решение «продолжать строительство», несмотря на опасность обвала стройки, то эта ошибка второго рода может повлечь гибель людей. Можно привести примеры, когда ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия, чем ошибка второго рода.

## 29.

### 29.1. Оптимальный критерий.

*Статистическим критерием* (или просто критерием) называют случайную величину  $K$ , которая служит для проверки нулевой гипотезы.

Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия  $K$  принимает отношение исправленных выборочных дисперсий. Это величина случайная потому, что в различных опытах дисперсии принимают различные значения.

Для проверки гипотез по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают (наблюдаемое) частное значение критерия.

Мы строим критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания в нее критерия была равна  $\alpha$  при условии, что нулевая гипотеза справедлива. Оказывается целесообразным ввести вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что нулевая гипотеза неверна и, следовательно, справедлива конкурирующая.

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Другими словами, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Тогда, если уровень значимости уже выбран, то критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Выполнение этого требования должно обеспечить минимальную ошибку второго рода, что конечно, желательно. *Наиболее мощный критерий и есть оптимальный.*

### 29.2. Теорема Неймана-Пирсона.

При сделанных предположениях существует наиболее мощный критерий проверки гипотезы  $H_0$ . Этот критерий задается критической областью

$$\chi_{1\alpha}^* = \{x : l(x) \leq c\},$$

где критическая граница  $c$  определяется из условия  $\varphi(c) = \alpha$ ,  $l(x)$  – это *статистика отношения правдоподобия*

$$l(X) = \frac{L(X; \mathcal{G}_1)}{L(X; \mathcal{G}_0)}.$$

30.

### 30.1. Непараметрические критерии.

Если закон распределения неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его  $A$ ), то проверяют нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону  $A$ .

Проверка гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения производится так же, как и проверка гипотезы о параметрах распределения, т. е. при помощи специально отобранной случайной величины – критерия согласия.

*Критерием согласия* называют критерий проверки гипотезы о законе неизвестного распределения.

Имеется несколько критериев согласия: Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др.

### 30.2. Критерий Колмогорова.

*Критерий согласия Колмогорова* используется для того, чтобы определить, подчиняются ли два эмпирических распределения одному закону, либо определить, подчиняется ли полученно

Критерий для эмпирической функции распределения  $F_n(x)$  определяется следующим образом:

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|,$$

где  $\sup S$  — точная верхняя грань множества  $S = |F_n(x) - F(x)|$ ,  $F(x)$  - предполагаемая модель.

Если статистика  $\sqrt{n}D_n$  превышает процентную точку распределения Колмогорова  $K_\alpha$  заданного уровня значимости  $\alpha$ , то нулевая гипотеза  $H_0$  (о соответствии закону  $F(x)$ ) отвергается. Иначе гипотеза принимается на уровне  $\alpha$  и распределение предполагаемой модели.

## 31.

### 31.1. Критерий Пирсона.

Ограничимся описанием критерия Пирсона к проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности (критерий аналогично применяется и для других распределений, в этом и состоит его достоинство). С этой целью будем сравниваем эмпирические (наблюдаемые) и теоретические (вычисленные в предположении нормального распределения) частоты.

Обычно теоретические и эмпирические частоты различаются.

Случайно ли расхождение частот? Возможно, что расхождение случайно (незначимо) и объясняется либо малым числом наблюдений, либо способом их группировки, либо другими причинами. Возможно, что расхождение частот неслучайно (значимо) и объясняется тем, что теоретические частоты вычислены исходя из неверной гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

Критерий Пирсона отвечает на поставленный выше вопрос. Правда, как и любой другой критерий, он не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

Пусть по выборке объема  $n$  получено эмпирическое распределение.

Допустим, что в предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты  $n'_i$ . При уровне значимости  $\alpha$  требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2 = \sum (n_i - n'_i)^2 / n'_i.$$

Критическую точку находим по таблице по заданному уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы  $k = s - 1 - r$  ( $s$  – число групп выборки,  $r$  – число параметров предполагаемого распределения), после чего сравниваем наблюдаемое значение критерия с критической точкой.

Если  $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$  – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если  $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$  – нулевую гипотезу отвергают.

### 31.2. Вычисление теоретических частот для различных видов распределений.

Как найти теоретические частоты, если предполагается, что генеральная совокупность распределена нормально? Ниже приведен один из способов решения этой задачи.

1. Весь интервал наблюдаемых значений  $X$  (выборки объема  $n$ ) делят на  $s$  частичных интервалов  $(x_i, x_{i+1})$  одинаковой длины. Находят середины частичных интервалов  $x_i = (x_i + x_{i+1})/2$ ; в качестве частоты  $n_i$  варианты  $x_i$  принимают число вариантов, которые попали в  $i$ -й интервал. В итоге получают последовательность равноотстоящих вариантов и соответствующих им частот:

$$\begin{array}{cccc} x_1^* & x_2^* & \dots & x_s^* \\ n_1 & n_2 & \dots & n_s \end{array}$$

При этом  $\sum n_i = n$ .

2. Вычисляют, например методом произведений, выборочную среднюю  $\bar{x}^*$  и выборочное среднее квадратическое отклонение  $\sigma^*$ .

3. Нормируют случайную величину  $X$ , т. е. переходят к величине  $Z = (X - \bar{x}^*)/\sigma^*$  и вычисляют концы интервалов  $(z_i, z_{i+1})$ :  $z_i = (x_i - \bar{x}^*)/\sigma^*$ ,  $z_{i+1} = (x_{i+1} - \bar{x}^*)/\sigma^*$ , причем наименьшее значение  $Z$ , т. е.  $z_1$  полагают равным  $-\infty$ , а наибольшее, т. е.  $z_s$ , полагают равным  $\infty$ .

4. Вычисляют теоретические вероятности  $p_i$  - попадания  $X$  в интервалы  $(x_i, x_{i+1})$  по равенству  $(\Phi(z) - \text{функция Лапласа})$

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$$

и, наконец, находят искомые теоретические частоты  $n_i = np_i$ .

## 32.

### 32.1. Элементы теории корреляции.

В математическом анализе мы имеем дело с функциональной зависимостью между двумя переменными величинами, при которой каждому значению одной из них соответствует единственное значение другой.

Однако часто приходится иметь дело с более сложной зависимостью, чем функциональная. Такая зависимость возникает тогда, когда одна из величин зависит не только от другой, но и от ряда прочих меняющихся факторов, среди которых могут быть и общие для обеих величин.

Так, например, с увеличением высоты сосны увеличивается диаметр ее ствола. Однако если исследовать эту зависимость по опытным данным, то может оказаться что для отдельных сосен с большей высотой диаметр ствола окажется меньше, чем для сосен с меньшей высотой. Это объясняется тем, что диаметр ствола сосны зависит не только от ее высоты, но и от других факторов (например, от свойств почвы, количества влаги и т.д.).

Это обстоятельство наглядно видно из таблицы, в которой приведены значения диаметров ствола сосны в зависимости от ее высоты. В каждой клетке этой таблицы помещено число сосен, имеющих соответствующие диаметр ствола и высоту\*. Так, например, количество сосен с высотой 24 м и с диаметром ствола 26 см равно двум.

	Высота (в м)						
Диаметр (в см)	22,5-23,5 23	23,5-24,5 24	24,5-25,5 25	25,5-26,5 26	26,5-27,5 27	27,5-28,5 28	$m_i$
20-24 22	2						2
24-28 26		2	1	2			5
28-32 30		2	2		1		5
32-36 34			2	1			3
36-40 38			1	1	2		4
40-44 42				2		3	5
44-48 46					2		2
$m_j$	2	4	6	6	5	3	26

Ниже приведены средние значения диаметра ствола сосны в зависимости от высоты.

Высота	23	24	25	26	27	28
Средний диаметр	22	28	32	34,7	39,6	42

Мы видим, что с увеличением высоты сосны в среднем растет диаметр ее ствола. Однако сосны заданной высоты имеют распределение диаметров с довольно большим рассеянием. Если в среднем, например, 26-метровые сосны толще, чем 25-метровые, то для отдельных сосен это соотношение нарушается.

В рассмотренном примере мы имеем две случайные величины:  $\xi$  - высота сосны и  $\eta$  - диаметр ее ствола. Каждому значению  $x$  величины  $\xi$  соответствует множество значений  $\eta$ , которые она может принимать с различными вероятностями. Говорят, что между  $\xi$  и  $\eta$  существует корреляционная зависимость.

### 32.2. Понятие корреляционной зависимости.

Две случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  находятся в *корреляционной зависимости*, если каждому значению одной из этих величин соответствует определенное распределение вероятностей другой.

Для характеристики корреляционной зависимости между случайными величинами вводится понятие коэффициента корреляции.

### 32.3. Точечные оценки для условных математических ожиданий и коэффициента корреляции.

Как мы знаем, если  $\xi$  и  $\eta$  - независимые случайные величины, то по свойству математического ожидания ([§ 4, п. 1](#))

$$M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$$

Если же  $\xi$  и  $\eta$  не являются независимыми случайными величинами, то, вообще говоря,

$$M(\xi \cdot \eta) \neq M(\xi) \cdot M(\eta)$$

Условились за меру связи (зависимости) двух случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  принять безразмерную величину  $R(\xi, \eta)$ , определяемую соотношением.

$$R(\xi, \eta) = \frac{M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta)}{\sigma(\xi) \cdot \sigma(\eta)}$$

и называемую *коэффициентом корреляции*.

### 33.

#### 33.1. Цепи Маркова.

Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из  $k$  несовместных событий и  $A_1, A_2, \dots, A_k$  полной группы, причем условная вероятность  $p_{ij}(s)$  того, что в  $s$ -м испытании наступит событие  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), при условии, что в  $(s-1)$ -м испытании наступило событие  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), не зависит от результатов предшествующих испытаний.

Например, если последовательность испытаний образует цепь Маркова и полная группа состоит из четырех несовместных событий  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , причем известно, что в шестом испытании появилось событие  $A_2$ , то условная вероятность того, что в седьмом испытании наступит событие  $A_4$  не зависит от того, какие события появились в первом, втором, ..., пятом испытаниях.

Заметим, что независимые испытания являются частным случаем цепи Маркова. Действительно, если испытания независимы, от появления некоторого определенного события в любом испытании не зависит от результатов ранее произведенных испытаний. Отсюда следует, что понятие цепи Маркова является обобщением понятия независимых испытаний.

Далее используется терминология, которая принята при изложении цепей Маркова. Пусть некоторая система в каждый момент времени находится в одном из  $k$  состояний: первом, втором, ...,  $k$ -м. В отдельные моменты времени в результате испытания состояние системы изменяется, т. е. система переходит из одного состояния, например  $i$ , в другое, например  $j$ . В частности, после испытания система может остаться в том же состоянии («перейти» из состояния  $i$  в состояние  $j = i$ ).

Таким образом, события называют состояниями системы, а испытания — изменениями ее состояний.

Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых система принимает только одно из  $k$  состояний полной группы, причем условная вероятность  $p_{ij}(s)$  того, что в  $s$ -м испытании система будет находиться в состоянии  $j$ , при условии, что после  $(s-1)$ -го испытания она находилась в состоянии  $i$ , не зависит от результатов остальных, ранее произведенных испытаний.

Цепью Маркова с дискретным временем, называют цепь, изменение состояний которой происходит в определенные фиксированные моменты времени.

Цепью Маркова с непрерывным временем называют цепь, изменение состояний которой происходит в любые случайные возможные моменты времени.

Однородной называют цепь Маркова, если условная вероятность  $p_{ij}(s)$  (перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$ ) не зависит от номера испытания. Поэтому вместо  $p_{ij}(s)$  пишут просто  $p_{ij}$ .

Пример. Случайное блуждание. Пусть на прямой  $Ox$  в точке с целочисленной координатой  $x = n$  находится материальная частица. В определенные моменты времени  $t_1, t_2, t_3, \dots$  частица испытывает толчки. Под действием толчка частица с вероятностью  $p$  смещается на единицу вправо и с вероятностью  $1 - p$  — на единицу влево. Ясно, что положение (координата) частицы после толчка зависит от того, где находилась частица после непосредственно предшествующего толчка, и не зависит от того, как она двигалась под действием остальных предшествующих толчков.

Таким образом, случайное блуждание — пример однородной цепи Маркова с дискретным временем.

### 33.2. Матрица перехода.

Переходной вероятностью  $P_{ij}$  называют условную вероятность того, что из состояния  $i$  (в котором система оказалась в результате некоторого испытания, безразлично какого номера) в итоге следующего испытания система перейдет в состояние  $j$ . Таким образом, в обозначении  $P_{ij}$  первый индекс указывает номер предшествующего, а второй — номер последующего состояния. Например,  $P_{11}$  — вероятность «перехода» из первого состояния в первое;  $P_{23}$  — вероятность перехода из второго состояния в третье.

Пусть число состояний конечно и равно  $k$ .

Матрицей перехода системы называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Так как в каждой строке матрицы помещены вероятности событий (перехода из одного и того же состояния  $i$  в любое возможное состояние  $j$ ), которые образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий равна единице. Другими словами, сумма переходных вероятностей каждой строки матрицы перехода равна единице:

$$\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Приведем пример матрицы перехода системы, которая может находиться в трех состояниях:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Здесь  $P_{11}=0,5$  — вероятность перехода из состояния  $i=1$  в это же состояние  $j=1$ ;

$P_{21} = 0,4$  — вероятность перехода из состояния  $i=2$  в состояние  $j=1$ . Аналогичный смысл имеют остальные элементы матрицы.

34.

### 34.1. Классификация состояний цепи Маркова.

Пусть  $\{\xi_n\}$  - простая цепь Маркова с состояниями  $A_1, A_2, \dots$

Определение: Состояние  $A_i$  называется не существенным, если существует такое состояние  $A_j$  что для некоторого  $K_0$   $P_{ij}(k_0) > 0$ , но  $P_{ji}(k) > 0 \quad \forall K$ . В противном случае состояние  $A_i$  называется существенным.

Не существенное – если найдется  $A_j$ , такое что попав туда мы не сможем вернуться.

Определение: Два существенных состояния  $A_i$  и  $A_j$  называется сообщающимися если  $K$  и  $m$ , такие что  $P_{ij}(k) > 0$  и  $P_{ji}(m) > 0$ . Иначе состояния не сообщаются.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$A_1$  и  $A_2$  не существенные,  $A_3$  и  $A_4$  существенные и сообщающиеся.

### 34.2. Теорема солидарности.

Цепь называется неприводимой, если все состояния ее образуют единственный класс либо невозвратных, либо возвратных состояний.

*Теорема солидарности.*

*В неприводимой цепи все состояния принадлежат одному типу: если хоть одно возвратно, то все возвратные, если хоть одно нулевое, то все нулевые, если хоть одно периодически, то все периодически.*

35.

**35.1. Теорема о предельных вероятностях.**

Если при некотором  $t_0$  все элементы матрицы  $P^t = [u_{ij}^{(t)}]$  положительны, то существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{ij(n)} = b_j,$$

где  $j = 1, \dots, r$ . Предельные вероятности  $b_j$  не зависят от начального состояния  $E_i$  и являются единственным решением системы уравнений

$$\sum_{j=1}^r b_j = 1, \sum_{k=1}^r b_k p_{kj} = b_j$$

где  $j=1, 2, \dots, r$ .

Физический смысл этой теоремы заключается в том, что вероятности нахождения системы в состоянии  $E_j$  практически не зависят от того, в каком состоянии она находилась в далеком прошлом.

## 36.

### 36.1. Случайные процессы.

*Случайный процесс (случайная функция)* — семейство случайных величин, индексированных некоторым параметром, чаще всего играющим роль времени или координаты.

Пусть дано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Параметризованное семейство  $\{X_t\}_{t \in T}$  случайных величин

$$X_t(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \in T,$$

где  $T$  произвольное множество, называется случайной функцией.

Если  $T \subset \mathbb{R}$ , то параметр  $t \in T$  может интерпретироваться как время. Тогда случайная функция  $\{X_t\}$  называется случайным процессом. Если множество  $T$  дискретно, например  $T \subset \mathbb{N}$ , то такой случайный процесс называется случайной последовательностью.

### 36.2. Марковские процессы со счетным множеством состояний.

*Марковский процесс* — случайный процесс, эволюция которого после любого заданного значения временного параметра  $t$  не зависит от эволюции, предшествовавшей  $t$ , при условии, что значение процесса в этот момент фиксировано («будущее» процесса не зависит от «прошлого» при известном «настоящем»).

В марковских процессах со счетным множеством состояний — количество состояний ограничено, а переходы могут осуществляться как дискретно в определенные моменты времени  $t_1, t_2, \dots$  или в момент времени  $t$ .

Случайный процесс называется процессом с дискретными состояниями, если возможные состояния системы  $S_1, S_2, S_3, \dots$  можно перечислить, а сам процесс состоит в том, что время от времени система  $S$  скачком (мгновенно) перескакивает из одного состояния в другое.

### 37.

#### 37.1. Локально-регулярные марковские процессы.

Марковская цепь называется *эргодической*, если каждое состояние из пространства состояний  $S$  может быть достигнуто из любого другого состояния из  $S$ . Эргодические цепи бывают двух видов:

- 1) *циклической* называется цепь, в которой каждое состояние может приниматься через определенные периодические интервалы.
- 2) *Регулярной* называется эргодическая цепь, не являющаяся циклической.

Регулярная цепь (или регулярный марковский процесс) движется между всех состояний в пространстве состояний, попадая в любое данное состояние через неопределенное число непериодических интервалов времени.

#### 37.2. Система уравнений Колмогорова.

Пусть система имеет конечное число состояний и случайный процесс, протекающий в ней, характеризуется некоторыми вероятностями нахождения системы в каждом из состояний.

В случае марковской системы с непрерывным временем и конечным числом состояний их вероятности могут быть найдены с помощью решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji}(t) \cdot P_j(t) - P_i(t) \cdot \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t),$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Величина  $\lambda_{ij}(t) P_i(t)$  называется потоком вероятности перехода из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$ .

Уравнения Колмогорова составляют по размеченному графу состояний системы, пользуясь следующим правилом: производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, идущих из других состояний в данное состояние, минус сумма всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другие.

Решение системы уравнений Колмогорова необходимо задать начальное распределение вероятностей  $P_0(0), P_1(0), \dots, P_n(0)$ . Как правило, за исключением особенно простых систем, решение возможно получить лишь численными методами.

38.

### 38.1. Применение теории марковских процессов к задачам теории массового обслуживания.

Марковская модель массового обслуживания — это описание операции массового обслуживания с помощью марковского процесса с дискретным множеством состояний. Однородный марковский процесс  $v(t)$  с дискретным, множеством состояний  $X = \{i\}$  определяется распределением начальных состояний  $P_k(0) = P(v(0) = k)$ ,  $k$  входит в  $X$ , и интенсивностями переходов  $\lambda_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(v(t+h) = j | v(t) = i)$ . Поэтому определение указанных характеристик должно входить в построение марковской модели. Кроме того, не всегда можно построить одномерный однородный марковский процесс, и приходится увеличивать его размерность. Другими словами, при построении марковской модели системы следует выбрать некоторое число переменных  $v_i(t)$  таким образом, чтобы они в своей совокупности образовывали однородный марковский процесс  $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots)$ . Важно подчеркнуть, что каждой особенности обслуживания (такой, как ограниченность времени ожидания, ненадежность обслуживающего прибора и др.) соответствуют свои переменные  $v_i(t)$ , принцип введения которых будет ясен из дальнейшего. Осуществляется как бы отображение признаков системы на «переменные признаков». Например, признаку ограниченности времени ожидания соответствуют особые переменные — фазы операции ожидания потери требования. Если время операции, соответствующей некоторому признаку, имеет экспоненциальное распределение, то необходимость введения соответствующих переменных  $v_i(t)$  отпадает. В любом случае в число переменных  $v_i(t)$  должны входить параметры, описывающие текущее состояние системы: число требований в накопителях и на обслуживании, а также характеристики состояния обслуживающих приборов.

### 39.

#### 39.1. Процесс Пуассона.

В случайные последовательные моменты времени  $t_1, t_2, t_3, \dots$  ( $t_1 > 0$ ) регистрируются какие-то события (в дверь входит очередной посетитель). Заведем считающий процесс  $X(t)$ , равный к моменту  $t$  числу событий, зарегистрированных к этому моменту  $t$  (или к моменту  $t+0$  - если мы хотим непрерывный справа процесс - по потребности).

Получаем, что  $X(t)=0$  для  $t$  из  $(0; t_1]$ ,  $X(t)=1$  для  $t$  из  $(t_1; t_2]$ ,  $X(t)=2$  для  $t$  из  $(t_2; t_3]$  и так далее. Этот процесс называется пуассоновским, если для любого  $t > 0$  случайная величина  $X(t)$  имеет распределение Пуассона с параметром  $ct$ , где  $c > 0$  - некоторая константа, не зависящая от  $t$ . Это верно если и только если все интервалы  $t_1, t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots$  между моментами событий процесса являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с показательным распределением (с параметром  $c$ , естественно).

Поток Пуассона служит для моделирования различных реальных потоков: несчастных случаев, потока заряженных частиц из космоса, отказов оборудования и других. Так же возможно применение для анализа финансовых механизмов, таких как поток платежей и других реальных потоков. Для построения моделей различных систем обслуживания и анализа их пригодности.

Использование потоков Пуассона значительно упрощает решение задач систем массового обслуживания, связанных с расчетом их эффективности. Но необоснованная замена реального потока потоком Пуассона там, где это недопустимо, приводит к грубым просчетам.